

Andere Konvergenzkriterien

1. Das Verhältniskriterium

Wenn $a_n > 0$ und $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, dann gilt: $a_n \rightarrow 0$ für $l \in [0, 1)$ und $a_n \rightarrow \infty$ für $l > 1$.

Falls $l = 1$ kann mit Hilfe dieses Kriteriums nichts über den Grenzwert der Folge ausgesagt werden.

2. Das Kriterium von Stolz-Cesaro

Wenn $(a_n)_{n \geq k}$ eine beliebige Folge ist und $(b_n)_{n \geq k}$ streng wachsend und divergent ist, und wenn

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}, \text{ dann ist } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$

3. Folgesätze

$$\text{a). } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$$

$$\text{b). } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = a$$

$$\text{c). } a_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a \text{ (Cauchy- D'Alembert).}$$

ÜBUNGEN

1. Berechne die folgenden Grenzwerte:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{3^n};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{3^n};$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{n!};$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{5 \cdot 3^n};$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!}, a > 0;$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} n^k \cdot a^n, a > 0, k \in \mathbb{R};$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (1+k^2)};$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{2k-1};$$

$$9) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3n+1)}.$$

$$2. \text{ Berechne: } 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^p}{n^{p+1}};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln n};$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k \cdot (k+1)(k+2)}{(n^2 + n)^2};$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt[3]{k}}{n \sqrt[3]{n}};$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=2}^n \frac{1}{\ln k}.$$

$$3. \text{ Berechne: } 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n! \cdot 3^n}};$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^{2n} (n!)}{(2n)!}};$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C_{2n}^n};$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{2!} \cdot \sqrt[3]{3!} \cdot \sqrt[4]{4!} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{n!}}$$